Exercice 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,,\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^+\end{array}\right\} \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

$$\text{Par croissance comparée } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln(x))}{\cancel{x^4}\,3} = \boxed{\frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}}$$

3. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln(x)$.

$$1-2\ln(x) \geqslant 0 \iff -2\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{car } x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ est croissante})$$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2}+1 \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}}}+1 \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}}+1 \\ &= \frac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \approx 1{,}184 \end{aligned}$$

4. **a.** Sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1+2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.

Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution.

Finalement l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{0{,}65 < \alpha < 0{,}66}$$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est strictement négative sur $]0\,;\,\alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

5. **a.** Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HM}^2 = \boxed{x^2 + [\ln(x)]^2}$$

b. On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x^2+[\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x+2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) = \frac{2x^2+2\ln(x)}{x} = \frac{2x^{\cancel{2}}\left(1+\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = 2x\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x\times f(x)$$

Or, pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$, on a $2x>0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

Donc, d'après la question **4.c.**, $h'(x)$ est négatif sur $]0\,;\,\alpha]$ et positif sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Donc h admet un minimum en $x=\alpha$.

La quantité OM^2 admet donc un minimum en α.

c. Pour $x = \alpha$, on a $\text{OM}^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.

α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.

Donc $\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$

Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.

Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$\boxed{d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$$